

# **Inleiding Mechanica**



# Inleiding Mechanica

R. Roest

© VSSD

Eerste druk 1987

Vijfde druk 1996

Zesde druk 2007

Uitgegeven door:

VSSD

Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands

tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: [hlf@vssd.nl](mailto:hlf@vssd.nl)

internet: <http://www.vssd.nl/hlf>

URL over dit boek: **<http://www.vssd.nl/hlf/c002.htm>**

Voor docenten die dit boek adopteren zijn de illustraties in het boek in elektronische vorm beschikbaar. Men kan de collectie aanvragen met een email naar [hlf@vssd.nl](mailto:hlf@vssd.nl)

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

*All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.*

Printed in The Netherlands.

Gedrukte editie: EAN 978- 90-71301-73-5

Elektronische versie EAN 978-90-6562-042-2

NUR 924, 929

Trefw: mechanica

# Voorwoord

Dit boek is bedoeld als opvolger van het gelijknamige boek van de hand van drs. A.N. Borghouts, waarvan in 1962 de eerste druk verscheen en dat sindsdien onafgebroken in gebruik is geweest bij verschillende faculteiten van de TU-Delft, terwijl het ook buiten Delft bekendheid en waardering genoot.

Evenals dat het geval was met het werk van Borghouts, is dit boek in de eerste plaats bestemd voor het propedeutisch onderwijs aan studenten in de (technische) natuurkunde en aanverwante studierichtingen.

Op voorstel van ir. G.A.M. van Kuik en ir. P.T. Smulders van de TU-Eindhoven is de behandeling van de dynamica van veel-deeltjes systemen vergemakkelijkt door tussenvoeging van een apart hoofdstuk over systemen van twee deeltjes.

Hoofdstuk 14 (Lineaire deformaties) is tot stand gekomen in nauw overleg met prof.dr.ir. F. Tuinstra.

Vele afleidingen en wiskundige verhandelingen zijn ontleend aan drs. I.J.N. Oedayrajsingh Varma.

De auteur is niet alleen aan de hierboven genoemden grote dank verschuldigd, maar ook aan prof.dr. G.J.C. Bots voor de vrijwel continue begeleiding, en voorts aan ir. W. Buijze, dr.ir. E. Stammers, drs. W. Wisman en de collegedienst van de Faculteit der Technische Natuurkunde voor hun hulp.

Voorburg, augustus 1987.

R. Roest.

## *Bij de derde druk*

Een speciaal woord van dank aan prof.dr.ir F. Bilsen (TU Delft) en dr. A.Th.A.M.. de Waele (TU Eindhoven) voor vele waardevolle op- en aanmerkingen!

Voorburg, september 1990.

R. Roest.

## *Bij de vijfde druk*

De tekst van de paragrafen 9.5 en 11.6 is gewijzigd. Op verschillende plaatsen zijn kleine veranderingen of uitbreidingen aangebracht met het doel, de tekst duidelijker, vollediger en begrijpelijker te maken.

Voorburg, augustus 1996.

R. Roest.

# Inhoud

VOORWOORD	5
1. INLEIDING	11
1.1. De plaats van de klassieke mechanica in de natuurkunde; indeling in de natuurkunde	11
1.2. Grootheden, eenheden, dimensies	13
1.3. Tabellen	16
1.4. Coördinatenstelsels	17
2. KINEMATICA VAN PUNTVORMIGE LICHAMEN	20
2.1. De plaatsvector	20
2.2. Snelheid en versnelling	21
2.3. Ontbinden in componenten van snelheid en versnelling	25
2.4. Kromlijnige beweging in een plat vlak	27
2.5. Cirkelbeweging; hoeksnelheid en hoekversnelling	29
2.6. Relatieve beweging	30
2.7. Voorbeelden en toepassingen	31
Overzicht van hoofdstuk 2	36
3. DE GRONDWETTEN VAN DE DYNAMICA	37
3.1. De wetten van Newton	37
3.2. Traagheid en trage massa	38
3.3. Krachten	43
3.4. Inertiestelsels	45
Overzicht van hoofdstuk 3	46
4. DYNAMICA VAN EEN PUNTMASSA	47
4.1. De bewegingsvergelijking	47
4.2. Harmonische trilling	51
4.3. Eenparige cirkelbeweging; centripetale kracht	55
4.4. Gravitatiekracht, zwaartekracht en gewicht	57
4.5. Zware massa en trage massa	61
4.6. Wrijving	62
4.7. Elastische krachten; veerkracht; spankracht	64
Overzicht van hoofdstuk 4	69
5. ARBEID, ENERGIE, IMPULS, IMPULSMOMENT	70
5.1. Arbeid en kinetische energie; vermogen	70
5.2. Potentiële energie; conserverend krachtveld	73
5.3. De samenhang tussen veldkracht en potentiële energie	76
5.4. Criterium voor conserverend krachtveld	78
5.5. Behoudswet 1: de wet van behoud van mechanische energie	81
5.6. Centrale krachtvelden (I)	83

5.7.	Energetische beschouwing van de harmonische trilling; anharmonische trillingen	87
5.8.	Dissiperende krachten	93
5.9.	Krachtstoot en impuls	95
5.10.	Krachtsmoment; impulsmoment van een puntmassa; perkenwet van Kepler	98
5.11.	Centrale krachtvelden (II): het equivalente een-dimensionale probleem	102
	Overzicht van hoofdstuk 5	106
6.	TWEE-DEELTJES SYSTEMEN; BOTSINGEN	107
6.1.	Behoudswet 2: de wet van behoud van impuls	107
6.2.	Massamiddelpunt; m.m.-coördinatenstelsel	108
6.3.	Mutuele potentiële energie van een twee-deeltjes systeem	111
6.4.	Harmonische trilling van een twee-deeltjes systeem	114
6.5.	Botsingen	117
6.6.	Voorbeelden en toepassingen	118
6.7.	De botsing beschouwd ten opzichte van het massamiddelpuntstelsel	122
6.8.	Impulsmoment van een twee-deeltjes systeem	124
6.9.	Het equivalente een-dimensionale probleem voor een twee-deeltjes systeem	127
	Overzicht van hoofdstuk 6	130
7.	DYNAMICA VAN EEN VERZAMELING PUNTMASSA'S	131
7.1.	Behoudswet 2 voor meer dan twee deeltjes	131
7.2.	Massamiddelpunt; m.m.-coördinatenstelsel	133
7.3.	Mutuele potentiële energie	135
7.4.	Impulsmoment van een verzameling van N puntmassa's; behoudswet 3	139
7.5.	Impulsmoment en massamiddelpunt; de impulsmomentstelling	140
7.6.	Massamiddelpunt van een lichaam	141
	Overzicht van hoofdstuk 7	142
8.	STARRE LICHAMEN; ROTATIE VAN EEN LICHAAM OM EEN VASTE AS	143
8.1.	Koppel	143
8.2.	Samenstellen van krachten op een star lichaam	144
8.3.	Zwaartepunt van een lichaam	148
8.4.	Kinetische energie van een roterend lichaam; traagheidsmoment	148
8.5.	Berekening van enige traagheidsmomenten	150
8.6.	Impulsmoment van een lichaam dat roteert om een vaste as	153
8.7.	Arbeid en vermogen bij rotatie om een vaste as	156
8.8.	Toepassingen van $\vec{M} = \vec{L}$	159
8.9.	De verschuivingsstelling van Steiner	163
8.10.	Harmonische rotatie-trillingen; fysische slingers	164
	Overzicht van hoofdstuk 8	171

9.	VLAKKE DYNAMICA VAN EEN STAR LICHAAM	172
9.1.	Vlakke beweging; translatie en rotatie	172
9.2.	De bewegingsvergelijkingen	173
9.3.	Kinetische energie bij vlakke beweging; vermogen	177
9.4.	Rollen	178
9.5.	De rolbeweging bij een motorfiets	185
9.6.	De rolweerstand	187
9.7.	Evenwichtsvoorwaarden	188
9.8.	Het principe van de virtuele verplaatsingen	191
9.9.	Statisch evenwicht en potentiële energie	192
	Overzicht van hoofdstuk 9	192
10.	RELATIEVE BEWEGING EN TRAAGHEIDSKRACHTEN	195
10.1.	Rechtlijnig bewegend eenparig versneld coördinatenstelsel	195
10.2.	Roterende coördinatenstelsels: twee bijzondere gevallen	197
10.3.	Roterende coördinatenstelsels (algemeen)	199
10.4.	Toepassingen	202
	Overzicht van hoofdstuk 10	211
11.	ENIGE ASPECTEN VAN DE NIET-VLAKKE DYNAMICA	212
11.1.	Statische en dynamische balans	212
11.2.	De traagheidstensor	214
11.3.	Hoofdtraagheidsassen en hoofdtraagheidsmomenten	216
11.4.	Bewegingsvergelijkingen voor de rotatie in een hoofdassenstelsel	219
11.5.	De tol-beweging	222
11.6.	Nutatie	222
11.7.	Precessie (eenvoudige beschrijving)	226
11.8.	Stabiliteit van de schijftol; toepassingen	229
11.9.	De zichzelf oprichtende tol	230
11.10.	De precessie van de aarde	231
	Overzicht van hoofdstuk 11	233
12.	HET OMGEKEERD KWADRATISCH CENTRALE KRACHTVELD	234
12.1.	Veldsterkte en potentiaal in een omgekeerd kwadratisch centraal krachtveld	235
12.2.	De stelling van Gauss voor het omgekeerd kwadratische veld	237
12.3.	Het gravitatieveld van de aarde	242
12.4.	De eigenenergie van een homogene bol	243
12.5.	Meting van de gravitatieconstante	246
12.6.	De stelling van Gauss in differentiële vorm; de vergelijkingen van Poisson en Laplace	248
12.7.	De wetten van Kepler	250
12.8.	De baanvergelijking	250
12.9.	De derde wet van Kepler	257
12.10.	Het twee-lichamen probleem	258



12.11.	Het equivalente een-dimensionale probleem voor het omgekeerd kwadratische centrale krachtveld	260
	Overzicht van hoofdstuk 12	263
13.	TRILLINGEN	264
13.1.	Het belang van de harmonische trilling	264
13.2.	Lineair gedempte vrije trilling	266
13.3.	Zwakke demping	270
13.4.	Kritieke demping en sterke demping	273
13.5.	Elektrisch analogon (I)	274
13.6.	Gedwongen trillingen	275
13.7.	Resonantie	279
13.8.	Elektrisch analogon (II); impedantie	281
13.9.	Energetische beschouwing van de gedwongen trilling	283
13.10.	Absorptiekromme, bandbreedte en kwaliteit; absorptie en dispersie	284
13.11.	Gekoppelde oscillatoren	287
	Overzicht van hoofdstuk 13	293
14.	LINEAIRE DEFORMATIES	295
14.1.	Deformeerbare lichamen	295
14.2.	Rek, dwarscontractie; alzijdige compressie	296
14.3.	Afschuiving	302
14.4.	De spanningstensor	306
14.5.	Buiging	309
14.6.	Torsie	316
14.7.	Elastische nawerking en hysteresis	319
	Overzicht van hoofdstuk 14	321
15.	VLOEISTOFMECHANICA	322
15.1.	Hydrostatica; de wet van Pascal	322
15.2.	De wet van Archimedes	327
15.3.	Hydrodynamica	331
15.4.	De continuïteitsvergelijking	332
15.5.	Bewegingsvergelijkingen voor wrijvingsloze fluïda	333
15.6.	Inwendige wrijving	341
15.7.	Laminaire stroming door een buis; formule van Poiseuille	347
15.8.	De kengrootheid van Reynolds	349
15.9.	Weerstandstroming; formule van Stokes	350
	Overzicht van hoofdstuk 15	353
16.	OPPERVLAKTEVERSCHIJNSELEN BIJ VLOEISTOFFEN	354
16.1.	Oppervlakte-energie	354
16.2.	Oppervlaktespanning	356
16.3.	Over- en onderdruk bij een gebogen vloeistofoppervlak	358
16.4.	Capillaire opstijging resp. neerdrukking	360

16.5. Olie op water	363
Overzicht van hoofdstuk 16	364
17. MECHANISCHE ASPECTEN VAN DE RELATIVITEITSTHEORIE	365
17.1. De lichtsnelheid in vacuo	365
17.2. Lengte en tijd	367
17.3. Impuls, massa en energie	373
17.4. De algemene relativiteitstheorie	378
Overzicht van hoofdstuk 17	379
APPENDIX	381
A.1. Scalairen en vectoren	381
A.2. Eenheidsvectoren	385
A.3. Inwendig of scalair produkt van twee vectoren; kwadraat van een vector; cosinusregel	386
A.4. Het differentiëren van een vector naar een scalar	388
A.5. Determinanten	390
A.6. Uitwendig of vectorprodukt van twee vectoren; sinusregel	391
A.7. Het vector-karakter van de hoeksnelheid	392
A.8. De kromtestraal $R$ in een punt van een vlakke kromme	394
A.9. Stieltjes-integraal: limiet van een som	395
A.10. Partiële afgeleiden van twee of meer variabelen	397
A.11. Scalaire velden en de gradiënt van een scalar	397
A.12. Vectorvelden; lijn-integraal van een vectorveld	399
A.13. De flux van een vectorveld door een oppervlak	401
A.14. De divergentie van een vectorveld; de divergentiestelling	402
A.15. De rotatie van een vectorveld; de stelling van Stokes	404
A.16. De operator van Laplace	407
A.17. De reeksontwikkeling van Taylor; benaderingen	408
A.18. De ruimtehoek	410
A.19. De kegelsneden (ellips, cirkel, parabool, hyperbool)	411
A.20. Het superpositiebeginsel	419
A.21. Complexe getallen; hyperbolische functies	421
LITERATUUR	424
TREFWOORDENLIJST	425

# 1

## Inleiding

### 1.1. De plaats van de klassieke mechanica in de natuurkunde; indeling van de mechanica

De mechanica is de leer van de bewegingsverschijnselen die fysische lichamen vertonen, al dan niet onder invloed van van buiten komende werkingen.

Omdat de natuurkundige zich tot taak stelt deze werkingen te begrijpen, is de mechanica een fundamenteel onderdeel van de natuurkunde.

Mechanica in de meest uitgebreide zin wordt genoemd relativistische quantummechanica.

In de praktijk onderscheidt men hiervan drie hoofdvormen:

- a. Quantummechanica.** Deze vindt voornamelijk toepassing daar waar sprake is van zeer kleine hoeveelheden (massa, energie) en van zeer kleine afstanden (atomaire schaal).
- b. Klassieke mechanica.** Het toepassingsgebied ligt overal waar sprake is van niet te grote snelheden ('niet te groot' wil zeggen: klein ten opzichte van de snelheid van het licht), niet te kleine massa's en niet te kleine afstanden.
- c. Relativistische mechanica.** Deze komt tot zijn recht daar waar sprake is van grote snelheden en grote afstanden (op kosmische schaal).

In dit boek komt alleen de klassieke mechanica aan de orde (hoewel in hoofdstuk 17 een tipje van de sluier over de relativistische mechanica wordt opgelicht).

Elke wetenschap is gebaseerd op een aantal veronderstellingen of *hypothesen*. Zo veronderstellen we de materie opgebouwd uit deeltjes die elkaar beïnvloeden; men zegt dat er tussen de deeltjes een wisselwerking of *interactie* bestaat. Elk deeltje is drager van eigenschappen die de aard van zijn wisselwerking met andere deeltjes bepalen. Men kan zodoende elk deeltje karakteriseren door een aantal *intrinsieke* (= voor dat deeltje specifieke) grootheden, zoals massa en elektrische lading.

Om nu het gedrag van deeltjes onder invloed van hun wisselwerkingen te beschrijven, gaat men uit van drie hypothesen, die karakteristiek zijn voor de gehele klassieke fysica:

#### **a. De gang van klokken is onafhankelijk van hun bewegingstoestand.**

Volgens deze hypothese zullen twee identieke klokken die eenmaal gesynchroniseerd zijn, synchroon blijven lopen, ook als zij ten opzichte van elkaar bewegen. Deze hypothese impliceert dus het bestaan van een *universele tijd*.

In de relativistische mechanica is dit concept niet houdbaar gebleken.

**b. De fysische ruimte is een euclidische ruimte.** Deze veronderstelling houdt in:

1. dat de ruimte *homogeen* is, dat wil zeggen alle punten van de materievrije ruimte zijn gelijkwaardig;
2. dat de ruimte *isotroop* is, dat wil zeggen alle richtingen in de materievrije ruimte zijn gelijkwaardig;
3. dat de stellingen van de *euclidische meetkunde* geldig zijn, in het bijzonder de stelling van Pythagoras die het gebruik van rechthoekige coördinaten aantrekkelijk maakt.

Een illustratie om dit laatste punt voor aardse afmetingen plausibel te maken is het door Gauss<sup>1</sup> in de jaren 1821–1823 uitgevoerde experiment, waarbij hij met behulp van lichtstralen vaststelde dat de som van de hoeken van een driehoek met zijden van 50 à 100 km bedraagt:  $179^\circ 59'$  en  $59,320$  boogseconden. Dit betekent een relatieve afwijking van de vereiste  $180^\circ$  van  $1 : 10^6$  dus 1 p.p.m. ('part per million'), hetgeen ruimschoots binnen de meetonnauwkeurigheid van het experiment ligt.

**c. Aan de nauwkeurigheid van de waarnemingen is geen principiële grens gesteld.** In de quantummechanica stuit men al gauw op de onzekerheidsrelatie van Heisenberg die onder andere inhoudt dat, als men de impuls (hoeveelheid beweging) van een deeltje zeer nauwkeurig kent, men niet tegelijkertijd ook de plaats van dat deeltje nauwkeurig kan weten.

De klassieke mechanica begint met de *kinematica*: de beschrijving van de bewegingen van lichamen, zonder de oorzaken van de bewegingen (de krachten) er bij te betrekken. In de kinematica maakt men gebruik van de begrippen plaats, snelheid, versnelling, afgelegde weg en baan.

De kern van de klassieke mechanica is evenwel de *dynamica*. Hier worden de oorzaken van de bewegingsveranderingen van lichamen onderzocht.

Een bijzonder geval van de dynamica is de *statica*: de leer van in evenwicht verkerende lichamen.

In eerste instantie zullen we ons bezighouden met de kinematica en dynamica van *puntmassa's* (lichamen waarvan de afmetingen nul worden gesteld) en van *starre lichamen* (lichamen waarvan de vorm onveranderlijk is).

Mechanica is, zoals de gehele natuurkunde, een wetenschap van de werkelijk bestaande materie en één van de kenmerken van de materie is nu juist zijn uitgebreidheid. Het antwoord op de vraag of de bestudering van puntvormige lichamen voor een fysicus dan wel zin heeft is echter om meer dan één reden bevestigend:

- a. In veel gevallen spelen de afmetingen geen rol, zodat men kan doen *alsof* het lichaam een puntmassa is. Wie wil uitrekenen hoeveel tijd een voertuig nodig

---

<sup>1</sup> Gauss, Carl Friedrich, 1777-1855

- heeft om een bepaalde weg af te leggen, kan het voertuig zonder bezwaar als puntvormig beschouwen.
- b. Als de afmetingen wel een rol spelen, kan men het lichaam altijd nog verdeeld denken in een groot aantal zeer kleine delen, elk van verwaarloosbare afmetingen. Slechts langs deze weg kan het mechanisch gedrag van uitgebreide lichamen adequaat worden bestudeerd.
  - c. Naderhand zal blijken dat in de dynamica van uitgebreide lichamen één bepaald punt (het *massamiddelpunt* van het lichaam) een bijzondere rol speelt. Dit punt laat zich bij vele beschouwingen als een puntmassa behandelen.

Na kinematica en dynamica komen nog twee onderdelen van de klassieke mechanica in dit boek aan de orde: elasticiteit en vloeistofmechanica.

In de *elasticiteitsleer* worden de vormveranderingen onderzocht van lichamen in de vaste aggregatietoestand onder de werking van krachten; zie hoofdstuk 14.

In de *vloeistofmechanica* (die gedeeltelijk ook toepasbaar is op gassen) wordt onder andere de drukverdeling in stilstaande fluïda onderzocht alsmede snelheids- en drukverdeling in stromende fluïda; zie hoofdstuk 15.

## 1.2. Grootheden, eenheden, dimensies

Begrippen die in de natuurwetenschappen en in de techniek worden gehanteerd, zoals ‘lengte’, ‘tijd’, ‘snelheid’, ‘massa’, ‘energie’, enz. worden grootheden genoemd. Grootheden van dezelfde soort zijn met elkaar vergelijkbaar in die zin dat men door meting hun verhouding kan bepalen. Is  $\alpha$  de verhouding tussen de grootheid X en een andere grootheid van dezelfde soort, dan kan men deze laatste kiezen als eenheid. Dan heet  $\alpha$  de getalwaarde van X, uitgedrukt in de eenheid. Algemeen geldt:

$$\text{grootheid} = \text{getalwaarde} \times \text{eenheid.}$$

In dit boek worden uitsluitend eenheden gebruikt die thuishoren in het S.I. (Système International d’Unités), welk stelsel sinds 1960 wereldwijd is aanvaard.

Dat wil niet zeggen dat alle oudere eenhedenstelsels nu plotseling van de aardbodem verdwenen zijn! Gevoel voor traditie (of behoudzucht) maakt, dat menige Brit nog lang zijn gewicht in ‘stones’ zal aanduiden en zijn lengte in ‘feet’. Commercieel is het soms aantrekkelijker, motorvermogens op te geven in pk in plaats van in de S.I.-eenheid kW (want 100 pk is 73,5 kW), en prijzen per pond in plaats van per kg.

Het S.I. omvat zeven basisgrootheden. Deze zijn (gevolgd door hun symbool):

lengte ( $l$ ), massa ( $m$ ), tijd ( $t$ ), elektrische stroom ( $I$ ), temperatuur ( $T$ ), hoeveelheid stof ( $n$ ) en lichtsterkte ( $I$ ).

De bijbehorende (grond-) eenheden zijn:

meter ( $m$ ), kilogram ( $kg$ ), seconde ( $s$ ), ampère ( $A$ ), kelvin ( $K$ ), mol ( $mol$ ) en candela ( $cd$ ).

Er zijn nog twee aanvullende grootheden, en wel hoek ( $\alpha$ ) en ruimtehoek ( $\Omega$ ), waarvan de eenheden zijn resp. radiaal (rad) en steradiaal (sr).

Voorts zijn er vele afgeleide grootheden en eenheden.

Alleen de eerste drie grondeenheden zijn van belang in de mechanica. Hun omschrijving luidt als volgt:

1. De *seconde* is de tijdsduur van 9.192.631.770 perioden van de straling overeenkomend met de overgang tussen de twee hyperfijn niveaus van de grondtoestand van het atoom cesium 133.

Het betreft hier dus straling van ca.  $9,2 \cdot 10^9$  Hz, dit is straling uit het microgolvengebied waartoe ook radar behoort. De periode van deze straling ('atoomklok') kan langs elektronische weg bijzonder nauwkeurig worden gemeten.

2. De *meter* is de grootte van de afstand die het licht in vacuo doorloopt in  $1/299.792.458$  seconde.

Merk op dat het getal 299.792.458 (afgerond:  $3,00 \cdot 10^8$ ) gelijk is aan de grootte van de lichtsnelheid in vacuo. De meter is dus vastgelegd via de lichtsnelheid in vacuo; van deze kan zodoende de getalwaarde nooit meer veranderen! Door middel van interferometers (optische instrumenten) kunnen lengten zeer nauwkeurig worden gemeten.

3. Het *kilogram* is de eenheid van massa; het is gelijk aan de massa van het internationale prototype van het kilogram.

Het internationale prototype van het kilogram is vervaardigd van platina-iridium en wordt bewaard in het Internationale Bureau voor Maten en Gewichten te Sèvres bij Parijs.

De massa van dit standaardkilogram is zo goed mogelijk gelijk gemaakt aan de massa van  $1 \text{ dm}^3$  water van  $4^\circ \text{ Celcius}$  (de oude definitie van 1 kg). Omdat de meetmethoden steeds verfijnder zijn geworden in de loop van de tijd, is de massa van  $1 \text{ dm}^3$  water van  $4^\circ \text{ C}$  niet meer precies gelijk aan 1 kg. De inhoud van exact 1 kg water van  $4^\circ \text{ C}$  wordt genoemd de *liter*. Deze wijkt dus een heel klein beetje af van  $1 \text{ dm}^3$ .

Van de aanvullende eenheden is voorlopig alleen de *radiaal* van belang (de *steradiaal* komt ter sprake in § A.18). Deze is aldus gedefinieerd:

De *radiaal* is de vlakke hoek tussen twee stralen van een cirkel, die op de omtrek een boog afsnijden waarvan de lengte gelijk is aan de straal.

*Onthoud:*

een hoek, uitgedrukt in radialen, is gelijk aan de verhouding boog/straal. Omdat van een cirkel met straal  $R$  de halve omtrek gelijk is aan  $\pi R$  terwijl de bijbehorende hoek ook wel  $180^\circ$  wordt genoemd, is  $\pi \text{ rad} = 180^\circ$ .

**In alle formules in dit boek waarin hoeken optreden, zijn altijd hoeken bedoeld, die zijn uitgedrukt in radialen!**

Voor de overige vier grondeenheden zij verwezen naar het normblad NEN 999, uitgegeven door het Nederlands Normalisatie Instituut.

**Afgeleide grootheden en eenheden.** De afgeleide eenheden van het S.I. worden uit de definities van de afgeleide grootheden verkregen, als producten en quotiënten van machten van grondeenheden. Zo volgt uit de definitie van de grootheid snelheid:  $v = l/t$  dat de afgeleide S.I.-eenheid is: m/s.

**Dimensies.** De dimensie van een fysische grootheid geeft aan hoe de grootheid uit de fundamentele grootheden (in de mechanica dus tijd, lengte en massa) is opgebouwd. De zojuist genoemde definitie van snelheid laat zien dat de dimensie van grootheid is: lengte/tijd, aangeduid als  $LT^{-1}$ .

Hieronder volgen nog enige voorbeelden van afgeleide grootheden en eenheden:

grootheid	definitievergelijking	dimensieformule	S.I.-eenheid
kracht	$F = ma$	$LMT^{-2}$	N (= kg·m s <sup>-2</sup> )
energie	$W = Ft$	$L^2MT^{-2}$	J (= Nm)
elektrische spanning	$U = P/I$	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	V (= J A <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup> )

**Dimensiecontrole.** Dimensieformules worden soms gebruikt om na te gaan of in een fysische vergelijking bij de afleiding geen fundamentele onjuistheden zijn ingeslopen. Men gaat dan na of voldaan is aan de voorwaarde dat de uitdrukkingen links en rechts van het gelijkteken dezelfde dimensie hebben. Hetzelfde kan men bereiken door na te gaan of aan beide zijden het produkt van alle eenheden, uitgedrukt in de grondeenheden, hetzelfde is.

*Voorbeelden*

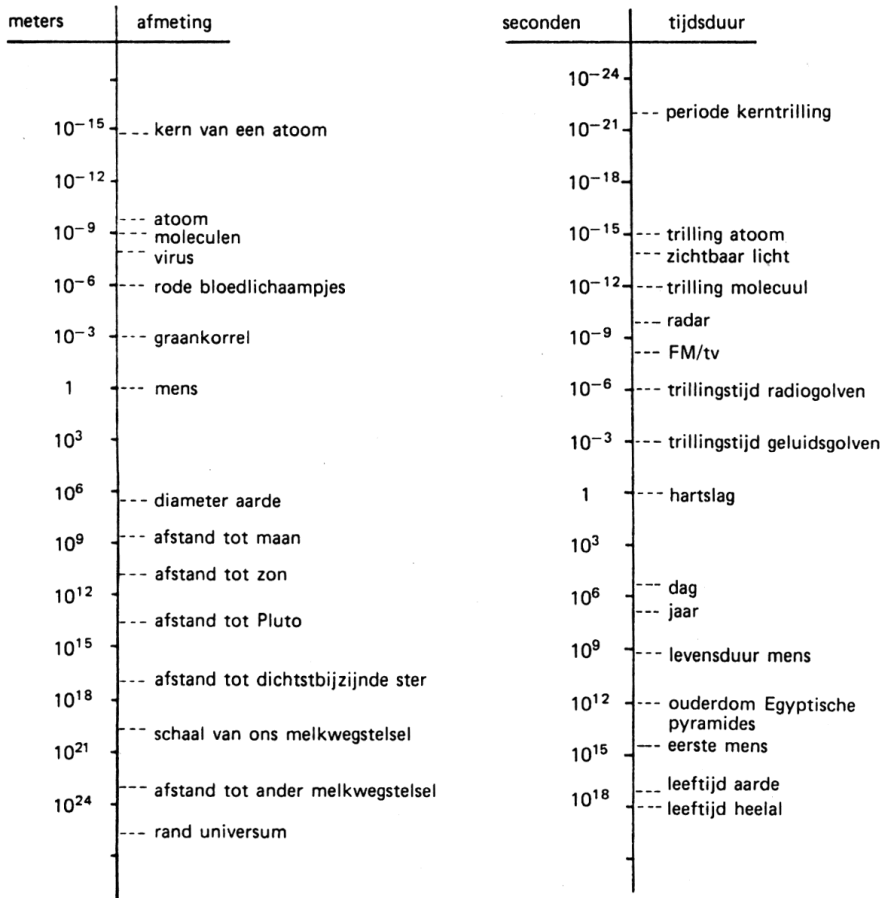
1. Afgelegde weg bij valbeweging:  $s = \frac{1}{2}gt^2$ .  
g heeft de dimensie  $LT^{-2}$  en  $t^2$  heeft de dimensie  $T^2$ . Het produkt heeft dus de dimensie L.
2. Trillingstijd van een mathematische slinger:  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ .  
De wortelvorm heeft de dimensie  $L^{1/2}(LT^{-2})^{-1/2} = T$ ;  
de factor  $2\pi$  is dus *dimensieloos*.

**Dimensieloze parameters.** Fysische vergelijkingen kunnen vaak met voordeel worden herschreven als vergelijkingen tussen dimensieloze samenstellingen van grootheden, de zogenaamde dimensieloze parameters. In een aantal gevallen hebben deze een eigen naam gekregen en een eigen symbool, dat is afgeleid van een persoonsnaam en dat geschreven wordt met twee letters waarvan de eerste een hoofdletter is. Een voorbeeld is de 'kengrootheid van Reynolds', die een belangrijke rol speelt in de stromingsleer:  $(\rho vl)/\eta$ , symbool: *Re*. De betekenis van  $\rho$ ,  $v$ ,  $l$  en  $\eta$  komt ter sprake in hoofdstuk 15.

### 1.3. Tabellen

In deze paragraaf verschijnen enkele tabellen, als illustratie van en ter aanvulling op het in de vorige paragraaf behandelde.

Tabel 1.1. Lengten en tijden (orde van grootte).



Tabel 1.2. Afgeleide eenheden met een eigen naam.

grootte	eenheid
volume (V)	kubieke meter ( $m^3$ )
frequentie (v)	hertz ( $Hz = s^{-1}$ )
kracht (F)	newton ( $N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$ )
druk (p)	pascal ( $Pa = N \cdot m^{-2}$ )
energie (W)	joule ( $J = N \cdot m$ )
vermogen (P)	watt ( $W = J \cdot s^{-1}$ )
elektrische spanning (U)	volt ( $V = W \cdot A^{-1}$ )

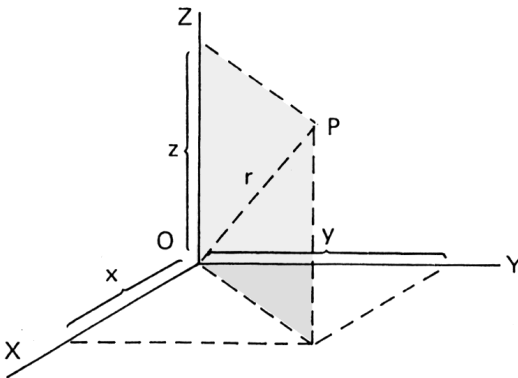


Tabel 1.3. S.I.-voorvoegsels.

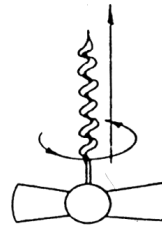
voorvoegsel	symbool	factor	voorvoegsel	symbool	factor
kilo	k	$10^3$	milli	m	$10^{-3}$
mega	M	$10^6$	mikro	$\mu$	$10^{-6}$
giga	G	$10^9$	nano	n	$10^{-9}$
tera	T	$10^{12}$	piko	p	$10^{-12}$
peta	P	$10^{15}$	femto	f	$10^{-15}$
exa	E	$10^{18}$	atto	a	$10^{-18}$

## 1.4. Coördinatenstelsels

Om de plaats van een punt P in de ruimte vast te leggen voeren we een coördinatenstelsel in. Meestal zal dit een rechtsdraaiend orthogonaal stelsel OXYZ zijn (een *cartesisch* coördinatenstelsel, zo genoemd naar Descartes<sup>2</sup>). Rechtsdraaiend wil zeggen dat de richting van de Z-as die is van een rechtse schroef (of kurketrekker), zoals die beweegt als hij wordt gedraaid over de kleinste hoek van de positieve X-as naar de positieve Y-as (zie figuur 1.1).



Figuur 1.1a.



Figuur 1.1b.

De projectie van P op de drie assen noemt men de *coördinaten*  $x$ ,  $y$  en  $z$  van P. Volgens de stelling van Pythagoras geldt voor de afstand  $r$  van P tot de oorsprong O:

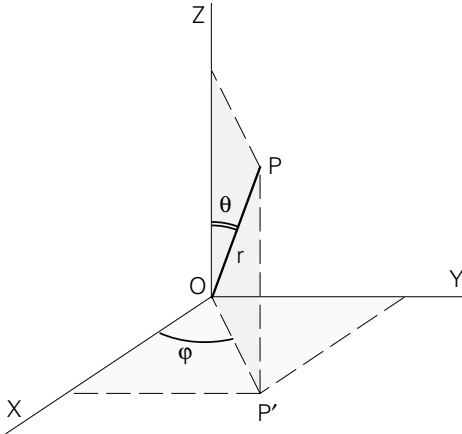
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Het naast elkaar gebruiken van links- en rechtsdraaiende rechthoekige coördinatenstelsels is bijzonder lastig (bijvoorbeeld voor het gebruik van vector-producten; zie § A.6). Er is daarom nauwlettend op toegezien dat in dit boek *uitsluitend rechtsdraaiende* rechthoekige coördinatenstelsels worden gebruikt. Soms is het nuttig *bolcoördinaten* te gebruiken (figuur 1.2). De plaats van het punt P

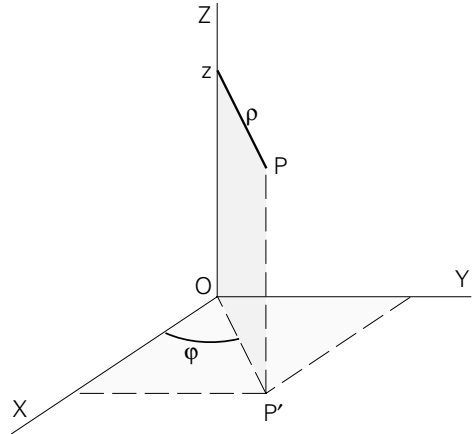
<sup>2</sup> Descartes, René, 1596-1650

wordt dan vastgelegd door de *voerstraal*  $r$ , de hoek  $\theta$  tussen de voerstraal en de positieve Z-as en de hoek  $\varphi$  tussen de projectie  $OP'$  van  $OP$  op het XY-vlak en de positieve X-as. We zien dat  $r > 0$ ; voor  $\theta$  geldt:  $0 \leq \theta \leq \pi$  en voor  $\varphi$ :  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

*Cilindercoördinaten* tenslotte zijn: de afstand  $\rho$  van  $P$  tot de Z-as (= de afstand  $OP'$ ),  $z$  en hoek  $\varphi$  (figuur 1.3).



Figuur 1.2.



Figuur 1.3.

Het verband tussen de cartesische en de bolcoördinaten is eenvoudig te vinden met behulp van de figuren 1.1 en 1.2:  $\rho = r \sin \theta$  en daarmee:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta.$$

Het verband tussen de cartesische en de cilindercoördinaten blijkt bij vergelijking van figuur 1.1 met figuur 1.3:

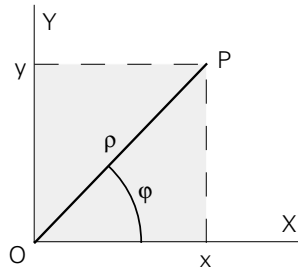
$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z.$$

Om de plaats van een punt  $P$  in een plat vlak vast te leggen zijn slechts twee coördinaten nodig. Men kiest daartoe de X- en Y-as in het bedoelde vlak.

Tussen bol- en cilindercoördinaten is er dan geen onderscheid (men spreekt in dat geval ook wel van *poolcoördinaten*); zie figuur 1.4.



Figuur 1.4.

# 2

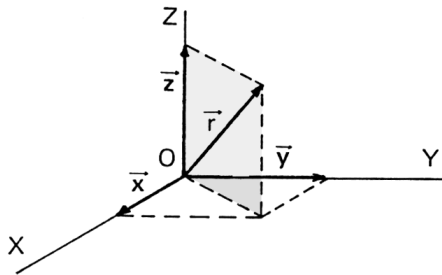
## Kinematica van puntvormige lichamen

### 2.1. De plaatsvector

De coördinaten van een door de ruimte bewegende puntmassa variëren in de loop van de tijd. Men geeft dat in de natuurkunde aldus aan:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

In de volgende paragrafen zal blijken dat het nuttig is de *plaatsvector*  $\vec{r}$  van de puntmassa in te voeren. Deze is gedefinieerd als een pijl die wijst van de oorsprong van het gebruikte coördinatenstelsel naar de puntmassa. De *componenten* van de vector  $\vec{r}$  zijn  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  en  $\vec{z}$  (zie figuur 2.1).



Figuur 2.1.

De getallen  $x$ ,  $y$  en  $z$  noemt men de *kentallen* van de vector  $\vec{r}$ . Men noteert vector  $\vec{r}$  wel als volgt:

$$\vec{r} = (x, y, z).$$

Omdat  $x$ ,  $y$  en  $z$  variëren met de tijd, schrijft men:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Beweegt de puntmassa uitsluitend in een plat vlak, dan kan men volstaan met twee coördinaten. Kiest men het vlak als  $XY$ -vlak dan geldt, in zo'n geval:

$$\vec{r} = (x, y, 0).$$

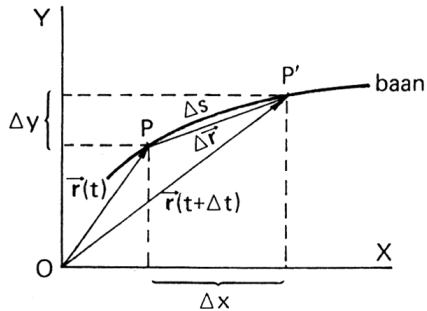
Beweegt de puntmassa uitsluitend langs een rechte lijn, dan kiest men deze als  $X$ -as. Voor de plaatsvector geldt dan:

$$\vec{r} = (x,0,0).$$

## 2.2. Snelheid en versnelling

Het eindpunt van de plaatsvector  $\vec{r}(t)$  van de bewegende puntmassa doorloopt in de ruimte een kromme die de *baan* wordt genoemd. De lengte van het in zekere tijd  $t$  doorlopen deel van de baan noemt men de in de tijd  $t$  *afgelegde weg*  $s(t)$ .

In figuur 2.2 is een deel van de baan van een puntmassa afgebeeld.



Figuur 2.2.

Gemakshalve is gekozen voor een vlakke baan; het nu volgende betoog is echter ook van toepassing op een niet-vlakke baan.

Op tijdstip  $t$  bevindt de puntmassa zich in punt  $P$  en op tijdstip  $t + \Delta t$  bevindt hij zich in  $P'$ .

De vector  $\Delta\vec{r} = \vec{OP}' - \vec{OP} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$  noemt men de *verplaatsing* van de puntmassa in het tijdvak  $[t, t+\Delta t]$ . De boog  $\Delta s$  is de in dat tijdvak afgelegde weg. Men definieert nu de *gemiddelde snelheid*  $\langle \vec{v} \rangle$  in het tijdvak  $[t, t+\Delta t]$  als  $\Delta\vec{r}/\Delta t$ . (Het in het dagelijks leven gehanteerde begrip “gemiddelde snelheid” is  $\Delta s/\Delta t$  en dus geen vector!).

De definitie van de grootte *snelheid*  $\vec{v}$  van de puntmassa op tijdstip  $t$  luidt:

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Voor het differentiëren van een vector naar een scalar zij verwezen naar § A4.

### Opmerking

*De snelheid raakt aan de baan.* Immers, als  $\Delta t \rightarrow 0$ , nadert  $P'$  tot  $P$  en de richting van de vector  $\Delta\vec{r}$  nadert tot die van de raaklijn in  $P$  aan de baan.

Voor de grootte  $v$  van de snelheid maakt het overigens niet uit of we

$$\left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| \quad \text{dan wel} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

berekenen. Immers, uit figuur 2.2 is te zien dat

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1.$$

Zoals men de afgeleide naar  $x$  van een functie  $f(x)$  wel aanduidt met  $f'$  heeft men voor de afgeleide naar  $t$  van een functie  $\phi(t)$  ook een speciale aanduiding, en wel  $\dot{\phi}$  (de *fluxie* van  $\phi$ ).

Met deze notatie kan men dus ook schrijven:

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{r}}.$$

De componenten van de vector  $\Delta \vec{r}$  zijn  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  en  $\Delta z$  (in figuur 2.2 is  $\Delta z$  uiteraard nul). (N.B. Eigenlijk zou hier de benaming ‘*kentallen*’ moeten worden gebruikt; de *componenten* zijn immers  $(\Delta x)\vec{i}$ ,  $(\Delta y)\vec{j}$  en  $(\Delta z)\vec{k}$ ; zie § A2).

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t} \text{ en } \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

zijn de drie componenten van de gemiddelde snelheid  $\langle \vec{v} \rangle$ . Daaruit volgt dat de drie componenten van de snelheid  $\vec{v}$  zijn:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \dot{x}; \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \dot{y}; \quad v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \dot{z}.$$

Omgekeerd volgt hieruit:

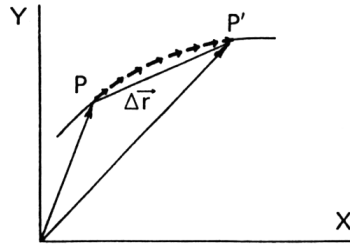
$$\Delta x = \int_t^{t+\Delta t} v_x dt; \quad \Delta y = \int_t^{t+\Delta t} v_y dt; \quad \Delta z = \int_t^{t+\Delta t} v_z dt.$$

Deze integralen zijn alle drie te interpreteren als ‘oppervlak onder een diagram’. De drie formules vatten we samen in de volgende uitdrukking:

$$\Delta \vec{r} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{v} dt. \tag{2.2}$$

Deze integraal is *niet* te interpreteren als ‘oppervlak onder een diagram’. Voor een nadere verklaring bekijken we figuur 2.3 waarin nog eens het stuk baan van de puntmassa in het tijdvak  $[t, t+\Delta t]$  is afgebeeld.

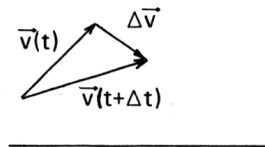
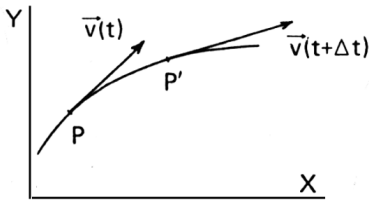
Dit tijdvak verdelen we in gedachten in vele zeer kleine deel-tijdvakjes. Elk deel-tijdvakje wordt vermenigvuldigd met de snelheid aan het begin van het deel-tijdvakje. Dit levert een serie vectortjes op die in figuur 2.3 kop-aan-staart zijn getekend. De pijltjes overdekken vrijwel de boog  $PP'$ ; hun (vector-) som is echter  $\Delta \vec{r}$ .



Figuur 2.3.

Onder de gemiddelde versnelling  $\langle \vec{a} \rangle$  van de puntmassa in het tijdvak  $[t, t+\Delta t]$  verstaan we:

$$\langle \vec{a} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (\text{zie figuur 2.4}).$$



Figuur 2.4a.

Figuur 2.4b.

Men definieert nu de *versnelling*  $\vec{a}$  van de puntmassa op tijdstip  $t$  aldus:

$$\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Ook hier kan men de ‘fluxie-notatie’ gebruiken:

$$\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (\text{dit laatste spreekt men uit als: ‘de dubbele fluxie van } \vec{r}\text{’}).$$

**N.B. De versnelling raakt in het algemeen *niet* aan de baan.**

Voor de componenten van de vector  $\vec{a}$  geldt:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Omgekeerd geldt:

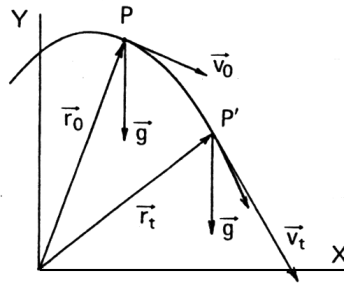
$$\Delta v_x = \int_t^{t+\Delta t} a_x dt; \quad \Delta v_y = \int_t^{t+\Delta t} a_y dt; \quad \Delta v_z = \int_t^{t+\Delta t} a_z dt.$$

Deze drie formules vatten we samen tot:

$$\Delta \vec{v} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{a} dt. \quad (2.4)$$

*Toepassing:*

De versnelling  $\vec{g}$  bij vrije val is vrijwel *onafhankelijk* van de hoogte (mits de hoogteverschillen beperkt blijven tot enige tientallen meters). In figuur 2.5 is een deel van de baan van een schuin weggeworpen bal getekend voor het geval dat de invloed van de luchtweerstand te verwaarlozen is; de Y-as is verticaal.



*Figuur 2.5.*

We kiezen als tijdstip 0 het ogenblik waarop de bal zich in P bevindt (met snelheid  $\vec{v}_0$ ) en als tijdstip t het ogenblik waarop de bal zich in P' bevindt (met snelheid  $\vec{v}_t$ ).

*Opmerking*

Deze slordigheid komt bij fysici veel voor: het symbool t betekent 'tijd', een variabele dus, maar ook een bepaald tijdstip, in feite dus een bepaalde waarde van die variabele!

Omdat  $\vec{g}$  in grootte noch richting van de tijd afhangt, volgt uit (2.4):

$$\vec{v}_t - \vec{v}_0 = \vec{g} t \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{g} t.$$

Met behulp van (2.2) volgt hieruit:

$$\vec{r}_t - \vec{r}_0 = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2.$$

De beide formules voor snelheid en verplaatsing zijn goede bekenden; het zijn de formules voor *eenparig versnelde* beweging.

Voor de componenten volgt uit de formule voor de verplaatsing:

$$\Delta x = v_{0x} t \quad \text{en} \quad \Delta y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vaak zal de versnelling *niet* constant zijn in de loop van de tijd; in zulke gevallen moeten we proberen, het probleem op te lossen, uitgaande van (2.4) en (2.2). Het heeft dus weinig zin, de formules voor de eenparig versnelde beweging uit het hoofd



te kennen!

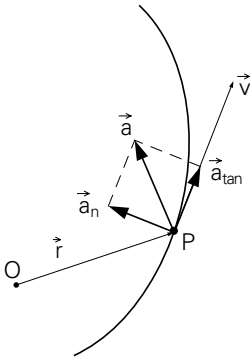
Ook de tijd-afgeleide van de versnelling heeft een naam: men noemt  $\dot{\vec{a}}$  de *ruk*.

Deze is de boosdoener bij het optreden van wagenziekte. Het eenparig versneld accelereren of remmen van een auto is voor de inzittende patiënt niet erg; hinderlijk is het voortdurend *veranderen* van de versnelling.

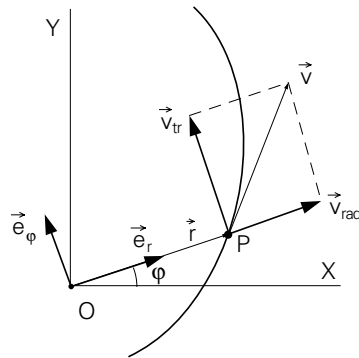
In een draaimolen verandert de versnelling voortdurend van *richting* (zie § 2.4), waardoor menig kind na afloop van de rit duizelig en misselijk is!

### 2.3. Ontbinden in componenten van snelheid en versnelling

In de vorige paragraaf zijn de x-, y- en z-componenten van  $\vec{v}$  en  $\vec{a}$  ter sprake gekomen. Twee andere mogelijkheden komen nu aan bod.



Figuur 2.6.



Figuur 2.7.

In figuur 2.6. is een deel weergegeven van een gekromde baan, beschreven door een puntmassa. Eenvoudshalve is gekozen voor een *vlakke* baan; dit is echter niet essentieel voor de inhoud van deze paragraaf.

Als oorsprong O is een punt gekozen in het baanvlak.

Op zeker ogenblik is de puntmassa in het punt P. In P zijn getekend de snelheid  $\vec{v}$  en de versnelling  $\vec{a}$  die de puntmassa daar bezit.

De versnelling is ontbonden in twee loodrecht op elkaar staande componenten: de *tangentiële* component  $\vec{a}_{\text{tan}}$  ('tangenteel' betekent 'rakend';  $\vec{a}_{\text{tan}}$  ligt langs de raaklijn in P) en de normale component  $\vec{a}_n$  ('normaal' betekent 'loodrecht';  $\vec{a}_n$  staat loodrecht op de snelheid).

De tangentiële component  $\vec{a}_{\text{tan}}$  kan in dezelfde richting als  $\vec{v}$  wijzen, zoals in figuur 2.6; in dat geval neemt de snelheid toe (tijdens het passeren van punt P). Hij kan echter ook aan  $\vec{v}$  tegengesteld gericht zijn; in dat geval neemt de snelheid in grootte af.

De normale component  $\vec{a}_n$  wijst altijd naar de holle kant van de baan.

In § 2.4 worden  $\vec{a}_{\text{tan}}$  en  $\vec{a}_n$  nader beschouwd.

Figuur 2.7 stelt dezelfde situatie voor; nu is echter de snelheid  $\vec{v}$  ontbonden in twee

onderling loodrechte componenten; de *radiale* component  $\vec{v}_{\text{rad}}$  waarvan de drager samenvalt met die van de plaatsvector  $\vec{r}$ , en de *transversale* component  $\vec{v}_{\text{tr}}$ .

In figuur 2.7 heeft  $\vec{v}_{\text{rad}}$  dezelfde richting als  $\vec{r}$ ; de grootte van de plaatsvector neemt in dat geval toe (tijdens het passeren van punt P).

$\vec{v}_{\text{rad}}$  zou echter ook naar O gericht kunnen zijn (bijvoorbeeld als de baan een andere vorm zou hebben, waardoor de hoek tussen  $\vec{r}$  en  $\vec{v}$  stomp zou zijn); in dat geval neemt de plaatsvector in grootte af. De richting van de transversale component  $\vec{v}_{\text{tr}}$  is in figuur 2.7 dezelfde als die van de richtingsvector  $\vec{e}_\varphi$ ; de hoek  $\varphi$  neemt in dat geval toe.

De richting van  $\vec{v}_{\text{tr}}$  zou echter net zo goed tegengesteld aan die van  $\vec{e}_\varphi$  kunnen zijn, bijvoorbeeld als de puntmassa de baan andersom zou doorlopen; in dat geval neemt  $\varphi$  af.

### Stelling

$$\vec{v}_{\text{rad}} = \dot{r} \vec{e}_r \quad \text{en} \quad \vec{v}_{\text{tr}} = r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

(voor de *eenheidsvectoren*  $\vec{e}_r$  en  $\vec{e}_\varphi$ , zie ook §A2).

### Bewijs

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}.$$

Om uit het differentiëren van de vector  $\vec{r}$  naar de tijd de radiale en de transversale componenten van  $\vec{v}$  te voorschijn te zien komen, scheiden we het richtingskarakter van de vector  $\vec{r}$  van het grootte-aspect, door voor  $\vec{r}$  te schrijven:

$$\vec{r} = r \vec{e}_r.$$

Voor de tijdafgeleide geldt dan:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (r \vec{e}_r) = \dot{r} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt}.$$

In §A4 wordt afgeleid:

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi.$$

### Conclusie

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (2.5)$$

### Opmerking

Ook  $\vec{a}$  is te ontbinden in een radiale en een transversale component  $\vec{a}_{\text{rad}}$  en  $\vec{a}_{\text{tr}}$ . Differentiëren van (2.5) naar de tijd geeft:

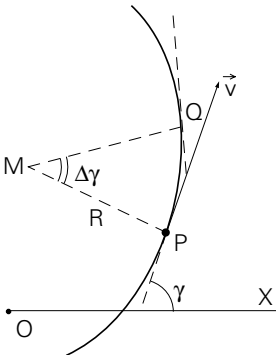
$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{e}_r) + \frac{d}{dt}(r \dot{\phi} \vec{e}_\phi) \\
 &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\phi} \vec{e}_\phi + r \ddot{\phi} \vec{e}_\phi + r \dot{\phi} \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} \\
 &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{r} \dot{\phi} \vec{e}_\phi + r \ddot{\phi} \vec{e}_\phi - r \dot{\phi}^2 \vec{e}_r \quad (\text{zie §A4}). \\
 \Rightarrow \vec{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \vec{e}_\phi. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Een toepassing hiervan wordt besproken in § 12.8.

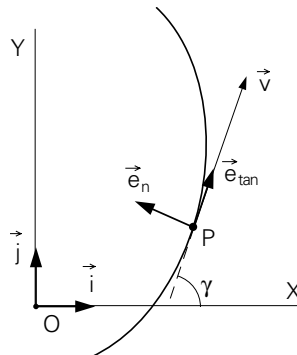
## 2.4. Kromlijnige beweging in een plat vlak

Figuur 2.8 stelt dezelfde situatie voor als de figuren 2.6 en 2.7.

In tijdsduur  $\Delta t$  beweegt de puntmassa van P naar Q. In P is zijn snelheid  $\vec{v}$ . De tijdsduur  $\Delta t$  is klein; het deel PQ van de baan kan daarom bij benadering worden opgevat als een stuk van een cirkel met middelpunt M en straal R. Deze M en R vinden we door in P een loodlijn op de baan te tekenen en in Q eveneens. Het snijpunt is M; de afstand MP is R.



Figuur 2.8.



Figuur 2.9.

De hoek die  $\vec{v}$  maakt met de X-as noemen we  $\gamma$ . De hoek tussen MP en MQ is dan  $\Delta\gamma$ . Volgens de definitie van de radiaal is:

$$R = \frac{\text{boog PQ}}{\Delta\gamma}.$$

Als de boog PQ niet zuiver cirkelvormig is, is R nu nog niet exact gedefinieerd. Uit het voorgaande kunnen we echter wel de juiste definitie achterhalen:

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\gamma \rightarrow 0} \frac{\text{boog PQ}}{\Delta\gamma}.$$

Met behulp van deze definitie kan men een formule voor R afleiden; zie §A8.

*Stelling*

$$\vec{a}_{\text{tan}} = \dot{v} \vec{e}_{\text{tan}} \quad \text{en} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n$$

(voor de eenheidsvectoren  $\vec{e}_{\text{tan}}$  en  $\vec{e}_n$ , zie figuur 2.9).

*Bewijs*

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}.$$

Om uit het differentiëren naar de tijd van de vector  $\vec{v}$  de tangentiële en de normale component van  $\vec{a}$  te voorschijn te zien komen, scheiden we eerst het richtingskarakter van de vector  $\vec{v}$  van het grootte-aspect, door voor  $\vec{v}$  te schrijven:  $\vec{v} = v \vec{e}_{\text{tan}}$ .

Voor de versnelling geldt nu:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v \vec{e}_{\text{tan}}) = \dot{v} \vec{e}_{\text{tan}} + v \frac{d\vec{e}_{\text{tan}}}{dt}.$$

Uit figuur 2.9 blijkt: de projectie van  $\vec{e}_{\text{tan}}$  op de X-as heeft als lengte  $1 \cdot \cos \gamma$ ; de projectie van  $\vec{e}_{\text{tan}}$  op de Y-as heeft de lengte  $1 \cdot \sin \gamma$ . Voor  $\vec{e}_{\text{tan}}$  kan men dus schrijven:  $\vec{e}_{\text{tan}} = (\cos \gamma; \sin \gamma)$ . Op soortgelijke wijze redenerend blijkt dat voor  $\vec{e}_n$  kan worden geschreven:  $\vec{e}_n = (-\sin \gamma; \cos \gamma)$ .

$$\Rightarrow \quad \frac{d\vec{e}_{\text{tan}}}{dt} = (-\dot{\gamma} \sin \gamma; \dot{\gamma} \cos \gamma) \quad \text{en dus:} \quad \frac{d\vec{e}_{\text{tan}}}{dt} = \dot{\gamma} \vec{e}_n.$$

Hiermee krijgen we voor de versnelling:

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_{\text{tan}} + v \dot{\gamma} \vec{e}_n.$$

Nu is

$$\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \gamma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\text{boog PQ}}{R} \cdot \frac{1}{\Delta t} \right) = \frac{v}{R}.$$

*Conclusie*

$$\vec{a} = \dot{v} \vec{e}_{\text{tan}} + \frac{v^2}{R} \vec{e}_n \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{\text{tan}} = \dot{v} \vec{e}_{\text{tan}} \quad \text{en} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R} \vec{e}_n.$$

De tangentiële versnelling heeft uitsluitend te maken met het groter of kleiner worden van de snelheid; merk op dat  $\dot{v}$  (zonder pijltje!) betekent: de fluxie van de *grootte* van de snelheid.

Het verband tussen de normale component van de versnelling en de kromtestraal wordt meestal gebruikt om de kromtestraal te berekenen als  $v$  en  $a_n$  bekend zijn. Immers:

$$a_n = \frac{v^2}{R} \quad \text{en dus:} \quad R = \frac{v^2}{a_n}.$$

## 2.5. Cirkelbeweging; hoeksnelheid en hoekversnelling

Stel, een lichaam draait om een vaste as (zie figuur 2.10). De hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  is gedefinieerd als een *vector* waarvoor geldt:

$$\text{a.} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

waarin  $\Delta\varphi$  de hoek is waarover het lichaam in tijdsduur  $\Delta t$  is geroteerd. Als  $\vec{\omega}$  *niet* met de tijd varieert is er sprake van *eenparige rotatie*. In dat geval is

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$$

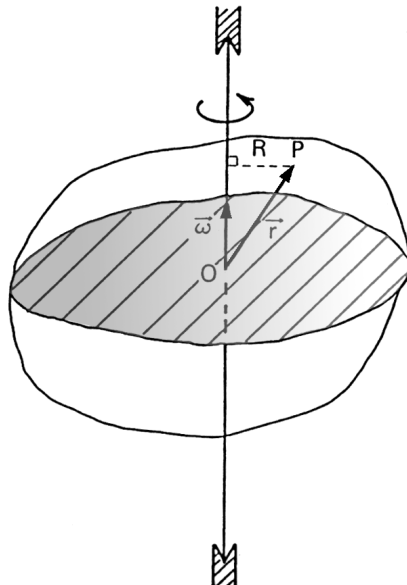
waarin T de *omlooptijd* is.

- b.  $\vec{\omega}$  is gericht langs de as, en wel zodanig dat de richting van  $\vec{\omega}$  en de zin, waarin de punten van het lichaam hun cirkelbanen doorlopen, bij elkaar behoren als de voortgaande en de draaiende beweging van een rechtse schroef. Voor het (willekeurig) gekozen punt P van het lichaam geldt:  $v = \omega R$  waarin R = de straal van de cirkelbaan van punt P.

Dankzij de definitie van  $\vec{\omega}$  kunnen we de snelheid van P ook op een meer bevredigende wijze noteren (namelijk direct als vector) en wel aldus:

$\vec{v}$  is het *uitwendig product* van de vectoren  $\vec{\omega}$  en  $\vec{r}$ :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$



Figuur 2.10.

Voorwaarde hiervoor is dat de oorsprong O ergens op de draaiings-as is gekozen. Voor de definitie van het uitwendig produkt zie § A6.

De tijd-afgeleide van de hoeksnelheid noemt men de *hoekversnelling*  $\vec{\alpha}$ . In formule:

$$\vec{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\vec{\omega}}.$$

Uit deze definitie blijkt dat er niet alleen van een hoekversnelling sprake is als de hoeksnelheid groter of kleiner wordt, maar ook als de oriëntatie van de as in de loop van de tijd zou veranderen.

De eenheid, behorende bij de grootte hoeksnelheid, is rad/s; de eenheid, behorende bij het begrip hoekversnelling, is rad/s<sup>2</sup>.

Voor de versnelling  $\vec{a}$  van het punt P geldt:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

De laatstgenoemde vector  $\vec{\omega} \times \vec{v}$  is steeds gericht naar het middelpunt van de cirkelbaan; zijn grootte is  $\omega^2 R = v^2/R$ . Deze versnellingscomponent is de *normale* component  $\vec{a}_n$  van de versnelling; ook noemt men hem wel de *middelpuntzoekende* versnelling.

De vector  $\vec{\alpha} \times \vec{r}$  is (tenzij  $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ; in dat geval hebben we te maken met een *eenparige* cirkelbeweging en is de versnelling zuiver middelpuntzoekend gericht) tangentieel gericht (immers,  $\vec{\alpha}$  is, omdat de draaiing plaatsvindt om een vaste as, òf met  $\vec{\omega}$  mee òf tegen  $\vec{\omega}$  in gericht). Voor de grootte van deze vector geldt:

$$|\vec{\alpha} \times \vec{r}| = \alpha R = |\dot{\omega}| R = |\dot{v}|.$$

Het zal duidelijk zijn dat we hier te maken hebben met de *tangentiële* versnellingscomponent  $\vec{a}_{\text{tan}}$ .

## 2.6. Relatieve beweging

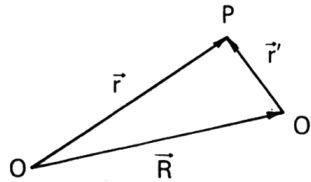
Snelheid is een relatief begrip. Als een fietser met 20 km/h voortrijdt, dan is dat gemeten ten opzichte van (een punt op) de weg. Ten opzichte van een andere fietser, die met 15 km/h uit tegenovergestelde richting nadert, is zijn snelheid echter 35 km/h.

De passagiers in een trein zijn in rust ten opzichte van de trein maar bewegen ten opzichte van een overweg die ze juist passeren. Degenen die bij de overweg staan te wachten, hebben een snelheid ten opzichte van de trein.

Uit het voorgaande blijkt dat de snelheid die men aan een puntmassa P toekent afhankelijk is van het betrekkingpunt.

In figuur 2.11 is O zo'n betrekkingpunt (oorsprong van een coördinatenstelsel). De plaatsvector van de puntmassa ten opzichte van O is  $\vec{r}(t)$ . O' is een tweede betrekkingpunt dat met een constante snelheid  $\vec{V}$  beweegt ten opzichte van O. De plaats-

vector van  $O'$  ten opzichte van  $O$  duiden we aan met  $\vec{R}(t)$ .



Figuur 2.11.

In figuur 2.11 is te zien dat de plaatsvector van de puntmassa ten opzichte van  $O'$ , aangeduid met  $\vec{r}'(t)$ , het verschil is van de plaatsvectoren  $\vec{r}$  en  $\vec{R}$ :

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}.$$

Differentiëren we deze uitdrukking naar de tijd, dan volgt:

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{R}}$$

ofwel:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad (2.7)$$

waarin  $\vec{v}$  = snelheid van  $P$  ten opzichte van  $O$ ,  $\vec{v}'$  = snelheid van  $P$  ten opzichte van  $O'$  en  $\vec{V}$  = snelheid van  $O'$  ten opzichte van  $O$ .

De relatie (2.7) wordt genoemd het *klassieke additietheorema van snelheden*. Deze relatie bestaat bij de gratie van de in § 1.1 vermelde hypothese van de universele tijd, dat wil zeggen bij de gratie van de veronderstelling dat de tijd in de coördinatenstelsels van  $O$  en  $O'$  identiek is:

$$t' = t. \quad (2.8)$$

In de *relativiteitstheorie* gebruikt men een andere manier om snelheden op te tellen; bij lage snelheden echter levert ook die manier weer (2.7) in goede benadering op. De betrekkingen (2.7) en (2.8) worden tezamen de *Galilei-transformatie*<sup>1</sup> genoemd.

## 2.7. Voorbeelden en toepassingen

1. Afgebeeld in figuur 2.12 is het snelheid-tijd diagram van een puntmassa die langs een rechte lijn (tevens  $X$ -as) beweegt.
  - a. Bepaal de versnelling op het tijdstip  $t = 1$  (s).
  - b. Bepaal de verplaatsing in het tijdinterval  $[0; 2]$ .

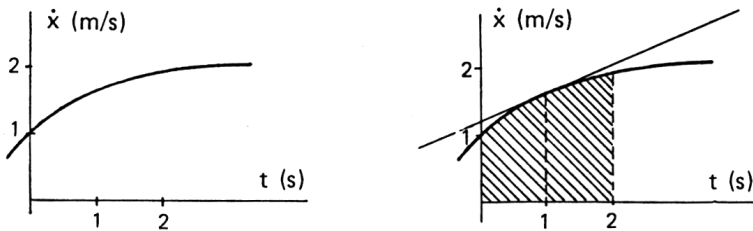
*Oplossing*

- a.  $\ddot{x}(1)$  = de steilheid van het  $x$ - $t$  diagram op  $t = 1$ . Deze is  $0,43$  (m/s<sup>2</sup>).

<sup>1</sup> Galilei, Galileo, 1564–1642

(Controleer dit zelf!)

Conclusie:  $\vec{a}(1) = (0,43; 0; 0)$ .

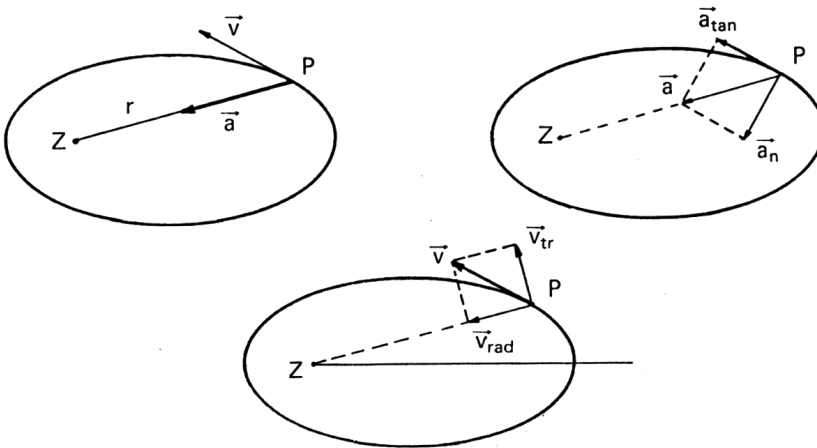


*Figuur 2.12.*

b. Het gearceerde oppervlak stelt voor: 3,3 m. (Ga zelf na dat dit ongeveer klopt!)

Dus  $\Delta\vec{r} = (3,3; 0; 0)$ .

2. Een planeet P beschrijft een ellipsvormige baan met de zon Z in één der brandpunten (zie § A.19). P en Z worden beide als puntmassa's beschouwd. De versnelling  $\vec{a}$  van P is voortdurend naar Z gericht (en is des te groter naarmate r kleiner is).



*Figuur 2.13. Figuur bij voorbeeld 2.*

We beschouwen de snelheidsverandering in een relatief kleine tijdsduur vanaf het bereiken van het in de tekening gekozen punt van de baan.

Daartoe dienen zich twee mogelijkheden aan:

- We ontbinden  $\vec{a}$  in een tangentiële en een normale component. Het is nu duidelijk dat  $\vec{v}$  in grootte toeneemt (dankzij  $\vec{a}_{tan}$ );  $\vec{a}_n$  zorgt er voor dat  $\vec{v}$  van richting verandert.
- We ontbinden  $\vec{v}$  in een radiale en een transversale component. Het misverstand zou nu gemakkelijk kunnen postvatten dat deze laatste niet groter of kleiner



wordt omdat immers  $\vec{a}$  loodrecht staat op  $\vec{v}_{tr}$ . Dit is echter niet juist, immers: voor de *grootte*-verandering van  $\vec{v}_{rad}$  en voor de *richtings*-verandering van  $\vec{v}_{tr}$  is een naar Z gerichte versnelling nodig (ga dit na!). Die versnelling is aanwezig. Groter worden van  $\vec{v}_{tr}$  doet denken aan een benodigde versnelling in de richting van  $\vec{v}_{tr}$ . Maar, voor de *richtings*-verandering van  $\vec{v}_{rad}$  is een versnelling nodig in de richting van  $-\vec{v}_{tr}$ . Het is dus zeer wel mogelijk dat beide veranderingen plaats hebben ondanks het ontbreken van een transversale versnellingscomponent. Welnu, omdat we zeker weten dat  $\vec{v}_{rad}$  van *richting* verandert, staat het dus ook vast, dat  $\vec{v}_{tr}$  in *grootte* toeneemt!

Voor een kwantitatieve aanpak van dit probleem zij overigens verwezen naar hoofdstuk 12.

**3.** Een puntmassa beweegt in het XY-vlak.

Voor zijn plaatsvector  $\vec{r}(t)$  geldt:  $\vec{r} = (4 \cos 7t; 3 \sin 7t)$ .

- a. Stel de baanvergelijking op.
- b. Bereken de kromtestraal van de baan in het punt (4;0).

*Oplossing:*

De baanvergelijking is van de vorm  $f(x,y) = 0$ . We beschikken over een uitdrukking voor  $x(t)$  en één voor  $y(t)$ . Uit deze uitdrukkingen moeten we de variabele  $t$  dus elimineren. Hiertoe gaan we als volgt te werk:

$$\begin{aligned} \text{a. } x &= 4 \cos 7t \Rightarrow x^2/16 = \cos^2 7t \\ y &= 3 \sin 7t \Rightarrow \frac{y^2}{9} = \sin^2 7t \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{ellips met halve assen 4 en 3 meter}). \end{aligned}$$

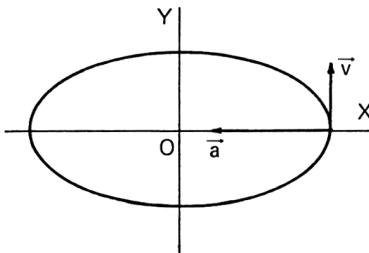
- b.  $x = 4$  en  $y = 0$  op  $t = k \cdot 2\pi/7$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Dan is  $\vec{v} = (0; 21) \text{ m/s}$ .  
 $\vec{a}$  is dan  $(-196; 0) \text{ m/s}^2$ . } Ga dit na.

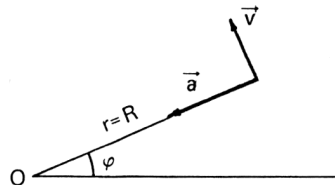
Hieruit blijkt dat in het punt (4; 0)  $\vec{a}$  loodrecht staat op  $\vec{v}$ .

$$\Rightarrow a_{tan} = 0 \text{ en } a_n = 196 \text{ m/s}^2.$$

$$\text{Omdat } a_n = v^2/R \text{ is omgekeerd ook } R = v^2/a_n \Rightarrow R = 21^2/196 = 2,25 \text{ m}.$$



Figuur 2.14. Figuur bij voorbeeld 3.



Figuur 2.15. Figuur bij voorbeeld 4.

**4. Gegeven:** Een puntmassa beweegt in een plat vlak; de versnelling  $\vec{a}$  staat voortdurend loodrecht op de snelheid  $\vec{v}$  en is constant in grootte.

*Te bewijzen:* Deze puntmassa voert een eenparige cirkelbeweging uit.

*Bewijs:*  $a_{\text{tan}} = 0 \Rightarrow \dot{v} = 0 \Rightarrow v = \text{constant}$ .

$$a_n = v^2/R = \text{constant en ook is } v \text{ constant (zou juist bewezen)}.$$

$$\Rightarrow R = \text{constant}.$$

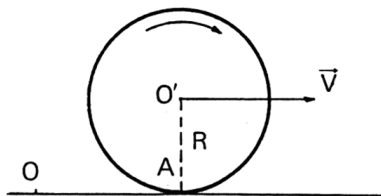
We zouden nu wellicht kunnen volstaan met de opmerking dat de enige vlakke figuur met overall dezelfde kromtestraal een cirkel is. We kunnen ook nog iets netter te werk gaan: Teken  $\vec{v}$  en  $\vec{a}$  van de puntmassa op een willekeurig ogenblik. De kromtestraal  $R = v^2/a$  tekenen we ook. Aan de ene kant van dit lijnstuk bevindt zich de puntmassa; aan de andere kant kiezen we de oorsprong  $O$  van ons coördinatenstelsel. Gebruikmakend van de relatie (2.5) constateren we nu:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \Rightarrow r = \text{constant (dus cirkel);} \\ r\dot{\phi} = v = \text{constant (dus eenparige cirkelbeweging).} \end{cases}$$

5. Een wiel (straal  $R$ ) *rolt* over de grond. Het middelpunt  $O'$  heeft een constante snelheid  $\vec{V}$  ten opzichte van een vast punt  $O$ . Vanuit  $O'$  bekeken roteert het wiel om een as door  $O'$  met hoeksnelheid  $\vec{\omega}$  (deze vector staat loodrecht op het vlak van tekening). Elk punt van de omtrek heeft dus ten opzichte van  $O'$  een snelheid  $\vec{v}'$  waarvan de grootte is:  $v' = \omega R$ . Ten opzichte van  $O$  heeft elk punt van de omtrek een snelheid  $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$ . Voor het onderste punt  $A$  is de grootte van deze snelheid:  $|v' - V|$  (want  $\vec{v}'$  is daar naar links gericht).

Het wiel slipt *niet*  $\Rightarrow v = 0$  voor het onderste punt  $\Rightarrow v' = V$  ofwel:

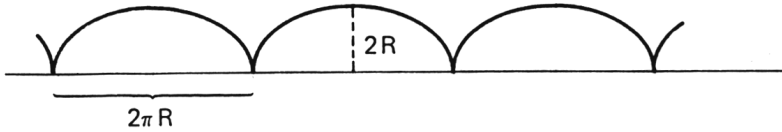
$$V = \omega R.$$



Figuur 2.16. Figuur bij voorbeeld 5.

Deze relatie staat bekend als de *rolvoorwaarde*. In § 9.4 komen we er op terug. De beweging van een punt  $A$  van de omtrek van het wiel is een **superpositie** van een rotatie (beweging ten opzichte van  $O'$ ) en een eenparige rechtlijnige beweging (die van  $O'$  ten opzichte van  $O$ ).

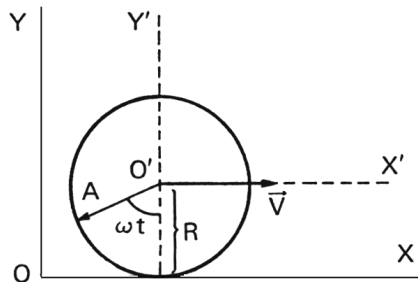
De door punt  $A$  beschreven baan (in het coördinatenstelsel van  $O$ ) is een voorbeeld van een *cycloïde*. Hij is in figuur 2.17 getekend.



Figuur 2.17.

*Nadere beschouwing van de beweging van een punt van de omtrek*

In de figuur 2.18 rolt het wiel langs de X-as van een vast coördinatenstelsel OXYZ. Het coördinatenstelsel O'X'Y'Z' beweegt met snelheid  $\vec{V}$ . De positie van O is nu zo gekozen dat op tijdstip  $t = 0$  het punt A van de omtrek van het wiel zich juist in O bevond. Na  $t$  seconden is de vector  $\vec{O'A}$  gewenteld over een hoek  $\omega t$ .



Figuur 2.18.

Voor de plaatscoördinaten van A in het bewegende stelsel geldt:

$$x' = -R \sin \omega t \quad \text{en} \quad y' = -R \cos \omega t .$$

De coördinaten van O' zijn, in het vaste stelsel, op tijdstip  $t$ :

$$x = Vt \quad \text{en} \quad y = R .$$

Voor de coördinaten van A geldt dus, ten opzichte van het vaste stelsel:

$$x = Vt - R \sin \omega t \quad \text{en} \quad y = R - R \cos \omega t .$$

Hieruit volgt, na elimineren van  $t$ , de baanvergelijking van punt A in het stelsel OXYZ. Dat leidt in dit geval tot een ingewikkelde, weinig verhelderende vergelijking, die we daarom maar *niet* vermelden.

Uit het bovenstaande volgt:

$$\dot{x} = V - \omega R \cos \omega t \quad \text{en} \quad \dot{y} = \omega R \sin \omega t$$

en dus:

$$\ddot{x} = \omega^2 R \sin \omega t \quad \text{en} \quad \ddot{y} = \omega^2 R \cos \omega t .$$

Uit deze vergelijkingen volgen enige interessante details, in overeenstemming met de afgebeelde cycloïde. Als het wiel een hele omwenteling heeft voltooid, is  $\omega t = 2\pi$  en  $x = V \cdot 2\pi / \omega = 2\pi R$  (volgens de rolvoorwaarde).  $y$  is dan weer nul, dus A is dan weer het aanrakingspunt met de grond.  $\dot{x}$  is op dat ogenblik  $V - \omega R = 0$ , terwijl ook  $\dot{y} = 0$ , dat wil zeggen A heeft op dat ogenblik geen snelheid. Verder is op dat ogenblik  $\ddot{x} = 0$  en  $\ddot{y} = \omega^2 R$ , dat wil zeggen punt A vertrekt hierna in opwaartse richting.

## Overzicht van hoofdstuk 2

Snelheid van een puntmassa:  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  raakt aan de baan.

Versnelling van een puntmassa:  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$  raakt in het algemeen *niet* aan de baan.

Poolcoördinaten: punt in X-Y-vlak wordt aangegeven met  $r$  en  $\varphi$  (hoek tussen  $\vec{r}$  en de X-as) in plaats van met  $x$  en  $y$ .

Radiale en transversale snelheidscomponenten:  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$ .

Tangentiële en normale versnellingscomponenten:  $\vec{a}_{\text{tan}} = \dot{v} \vec{e}_{\text{tan}}$  en  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .

Hoekversnelling:  $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$

De Galileï-transformatie: 
$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}. \\ t' = t. \end{cases}$$